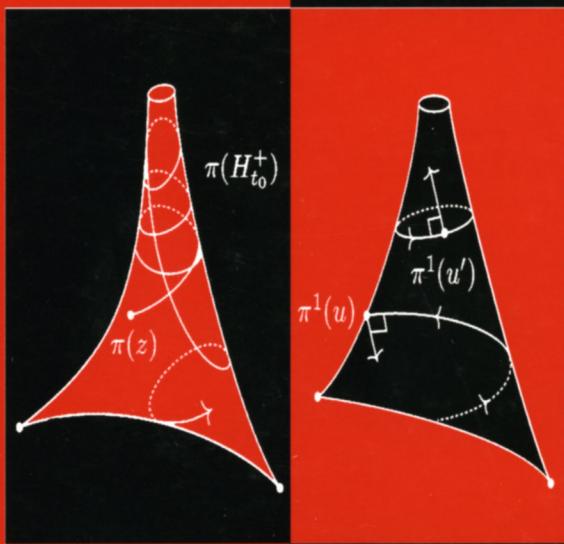


Françoise DAL'BO

# Trajectoires géodésiques • et horocycliques •

**SAVOIRES ACTUELS**

CNRS ÉDITIONS



Françoise Dal'Bo

# Trajectoires géodésiques et horocycliques

S A V O I R S     A C T U E L S  
EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Françoise Dal'Bo  
IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France  
dalbo@univ-rennes1.fr

Imprimé en France

© 2007, EDP Sciences, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf,  
91944 Les Ulis Cedex A  
et  
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

**ISBN** EDP Sciences 978-2-86883-997-8

**ISBN** CNRS ÉDITIONS 978-2-271-06582-7

*À Dominique,  
à Alma et Romance*



## TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-propos.....</b>	<b>vii</b>
<b>I. Géométrie des groupes fuchsiens.....</b>	<b>1</b>
1. Préliminaires.....	1
2. Isométries positives et groupes fuchsiens.....	10
3. Points limites des groupes fuchsiens.....	19
4. Finitude géométrique.....	27
5. Commentaire.....	36
<b>II. Exemples de groupes fuchsiens.....</b>	<b>39</b>
1. Groupes de Schottky.....	39
2. Codage de l'ensemble limite d'un groupe de Schottky.....	49
3. Le groupe modulaire et deux sous-groupes.....	53
4. Développements en fractions continues.....	62
5. Commentaire.....	73
<b>III. Dynamique topologique du flot géodésique.....</b>	<b>75</b>
1. Préliminaires.....	76
2. Lecture à l'infini de propriétés topologiques des trajectoires de $g_{\mathbb{R}}$ .....	80
3. Trajectoires périodiques et périodes.....	86
4. Trajectoires denses.....	90
5. Commentaire.....	92
<b>IV. Groupes de Schottky et dynamique symbolique.....</b>	<b>93</b>
1. Codage.....	94
2. Densité des trajectoires périodiques et trajectoires denses.....	97
3. Applications au cas général.....	99
4. Commentaire.....	102

<b>V. Dynamique topologique du flot horocyclique.....</b>	<b>105</b>
1. Préliminaires.....	105
2. Le flot horocyclique sur un quotient.....	109
3. Lecture à l'infini des trajectoires denses et périodiques.....	114
4. Caractérisations des groupes fuchsiens géométriquement finis..	118
5. Commentaire.....	120
<b>VI. Point de vue lorentzien.....</b>	<b>123</b>
1. Le modèle de l'hyperboloïde.....	124
2. Interprétation lorentzienne de la dynamique du flot géodésique	130
3. Interprétation lorentzienne de la dynamique du flot horocyclique	135
4. Commentaire.....	137
<b>VII. Des trajectoires pour approcher les nombres.....</b>	<b>139</b>
1. Excursion d'un rayon géodésique dans une cuspide.....	140
2. Points géométriquement mal approchés.....	144
3. Applications à la théorie des approximations diophantiennes..	148
4. Commentaire.....	157
<b>Bibliographie.....</b>	<b>159</b>
<b>Index.....</b>	<b>165</b>

## AVANT-PROPOS

Dans cet ouvrage, nous proposons une introduction à la dynamique topologique de deux flots classiques associés aux surfaces de courbure  $-1$  à savoir, les flots géodésique et horocyclique. Depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, de nombreux textes ont été écrits sur ce sujet.

### *Pourquoi avons-nous entrepris une telle rédaction ?*

Au cours des différents exposés que nous avons donnés sur ce thème, notamment lors d'écoles d'été organisées par l'université de Savoie, nous avons souvent regretté de ne pas pouvoir conseiller un livre à ceux qui souhaitaient découvrir par eux-mêmes ce domaine. Devant l'insistance de ces derniers et leur enthousiasme pour ce sujet porteur, nous avons décidé de dépasser le stade du regret et de rédiger nos notes.

Depuis une trentaine d'années, des liens très forts se sont tissés entre les systèmes dynamiques et la théorie des nombres. La rencontre entre ces deux domaines repose sur un changement de point de vue qui, en dimension 2, consiste essentiellement à considérer qu'un réel est un point du *bord à l'infini* du demi-plan de Poincaré, et à lui associer une géodésique de la surface modulaire pointée dans sa direction (paragraphe VII.3). Ce cas d'école est encore source d'inspiration pour un grand nombre de spécialistes. Il est parfois tellement présent dans les esprits qu'il devient absent des textes. Une de nos motivations a été de le remettre en lumière.

### *À qui s'adresse cet ouvrage ?*

Le lecteur est supposé avoir quelques connaissances en géométrie différentielle. Notre ambition a été de rendre ce texte lisible par un étudiant motivé de master. Nous avons également pensé aux spécialistes d'autres domaines, intéressés par ce sujet.

En ponctuant notre texte d'exercices, nous avons essayé de ne pas inhiber la pensée du lecteur par des démonstrations trop détaillées ou trop succinctes.

*Quel en est l'esprit ?*

Ce texte a été écrit avant tout dans l'idée de mettre en évidence, dans un cadre relativement élémentaire, l'existence de passerelles entre des domaines mathématiques, et l'intérêt qu'il peut y avoir à les emprunter.

Nous avons choisi de ne pas aborder l'aspect historique et de repousser la plupart des références à la fin de chaque chapitre, dans la partie commentaire. Certaines de nos démonstrations sont empruntées à la littérature, notre travail ayant consisté, parfois, à les simplifier.

Le degré de difficultés (ou de facilités) de chaque chapitre étant relativement le même, le déroulement de ce texte ne s'apparente pas à l'ascension d'un sommet. Sa progression va plutôt dans le sens des applications.

*Quel en est le contenu ?*

Nous commençons par un chapitre d'introduction à la géométrie hyperbolique plane et aux *groupes fuchsiens*, inspiré du livre de S. Katok « Fuchsian Groups » [36]. Un groupe fuchsien agit proprement discontinûment sur le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$ . S'il n'est pas fini, ses orbites s'accumulent donc sur le bord à l'infini  $\mathbb{H}(\infty)$  de  $\mathbb{H}$  en une constellation de points appelée *ensemble limite* du groupe. Nous nous intéressons aux différentes façons dont ces points sont approchés, ce qui nous amène à définir les points *coniques* et *paraboliques*, et à introduire la notion de groupes *géométriquement finis* (paragraphe I.4).

Dans le chapitre II, nous étudions des exemples de tels groupes en privilégiant les *groupes de Schottky* et le *groupe modulaire*. Dans chacun des cas, nous construisons un codage de leur ensemble limite par des suites, et établissons un dictionnaire entre certaines propriétés géométriques des points limites et d'autres, combinatoires, des suites. Le codage mis en jeu pour le groupe modulaire permet par exemple d'interpréter en termes de géométrie hyperbolique, le développement en fractions continues des réels et de relier le *nombre d'or* à la longueur de la plus petite géodésique compacte sur la *surface modulaire* (paragraphe II.4).

Dans le chapitre III, nous étudions la dynamique topologique du flot géodésique  $g_{\mathbb{R}}$  sur le quotient  $T^1S$  du fibré unitaire tangent de  $\mathbb{H}$  par un groupe fuchsien  $\Gamma$ . L'idée directrice consiste à relier la dynamique de ce flot à celle de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}(\infty)$ . Nous montrons que si  $\Gamma$  n'est pas élémentaire, l'ensemble des éléments périodiques pour  $g_{\mathbb{R}}$  est dense dans l'*ensemble non errant*  $\Omega_g(T^1S)$  de ce flot, et qu'il existe des trajectoires

denses dans  $\Omega_g(T^1S)$  (paragraphes III.3 et III.4). Par ailleurs, lorsque  $\Gamma$  est géométriquement fini, nous construisons un compact rencontré par toutes les trajectoires incluses dans  $\Omega_g(T^1S)$  (paragraphe III.2).

Dans le chapitre IV, nous nous restreignons au cas où le groupe fuchsien est un groupe de Schottky. En utilisant le codage de son ensemble limite, construit dans le chapitre II, nous développons une approche symbolique permettant d'étudier la topologie des trajectoires du flot géodésique sur  $\Omega_g(T^1S)$  et d'en apprécier la complexité. Nous construisons par exemple des trajectoires incluses dans  $\Omega_g(T^1S)$  qui ne sont ni compactes, ni denses, et obtenons, dans le cas général d'un groupe fuchsien non élémentaire, l'existence de compacts invariants par le flot géodésique, non périodiques et minimaux (paragraphe IV.3).

Le chapitre V est consacré à l'étude du flot horocyclique  $h_{\mathbb{R}}$  sur  $T^1S$ . La méthode que nous utilisons repose sur une correspondance entre les horocycles de  $\mathbb{H}$  et les vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^2$ , modulo  $\pm \text{Id}$ . Ce point de vue vectoriel permet de relier l'action de  $h_{\mathbb{R}}$  sur  $T^1S$  à celle d'un groupe linéaire sur un plan vectoriel, et d'obtenir par exemple l'existence de trajectoires denses dans l'ensemble non errant  $\Omega_h(T^1S)$  de ce flot (paragraphes V.2 et V.3). Lorsque le groupe  $\Gamma$  est géométriquement fini, la dynamique du flot horocyclique, contrairement à celle du flot géodésique, est simple puisqu'une trajectoire incluse dans  $\Omega_h(T^1S)$  est dense ou périodique (paragraphe V.4). Sous des comportements très différents, ces deux flots sont en fait intimement liés dans le sens où le flot  $h_{\mathbb{R}}$  reflète le comportement collectif des trajectoires asymptotes du flot  $g_{\mathbb{R}}$ .

Les deux derniers chapitres sont dédiés à des applications de l'étude de ces flots, l'une dans le domaine des actions linéaires, l'autre dans celui des approximations diophantiennes.

Dans le chapitre VI, nous nous intéressons à l'espace de *Lorentz*  $\mathbb{R}^3$  muni d'une forme bilinéaire de signature  $(2, 1)$  et relions la topologie des orbites d'un groupe discret  $G$  de transformations orthogonales pour cette forme, à celle des trajectoires des flots géodésique et horocyclique sur le quotient du fibré unitaire tangent de  $\mathbb{H}$  par un groupe fuchsien. En traduisant dans ce contexte vectoriel, les résultats démontrés sur le flot horocyclique, on obtient par exemple une description complète des orbites de  $G$  situées dans le *cône de lumière*, lorsque ce groupe est de type fini (paragraphe VI.3).

Dans le chapitre VII, nous donnons une traduction en géométrie hyperbolique de l'approximation diophantienne d'un réel par des rationnels. En nous appuyant sur la dynamique du flot géodésique sur la surface modulaire, nous retrouvons entre autre qu'un réel est *mal approché* si et seulement si

les coefficients intervenant dans son développement en fractions continues sont bornés (paragraphe VII.3).

En privilégiant un cadre géométrique simple et en choisissant de ne pas aborder l'aspect métrique de ces flots, nous limitons la portée des énoncés et masquons quelquefois les idées importantes présentes dans les raisonnements. Pour que le lecteur n'ait pas l'illusion d'avoir fait le tour du sujet, à la fin de chaque chapitre, sous forme de commentaires, nous replaçons notre étude dans un contexte riemannien général et l'introduisons dans le vaste domaine de la géométrie ergodique. Enfin, nous proposons des problèmes ouverts redonnant à ce thème bien vivant sa part d'inconnu, et donc sa place dans la recherche actuelle.

Nous remercions Claude Sabbah pour l'attention qu'il a portée à ce texte et pour ses précieuses relectures. Nous remercions également Raymond Séroul pour la réalisation des figures.

Françoise Dal'Bo

# CHAPITRE I

## GÉOMÉTRIE DES GROUPES FUCHSIENS

Nous proposons ici une introduction à la géométrie hyperbolique plane (paragraphes 1 et 2) et aux groupes fuchsiens (paragraphes 3 et 4) inspirée des livres de A. Beardon « The geometry of discrete groups » [6] et de S. Katok « Fuchsian groups » [36].

Nous supposons que le lecteur a un bagage minimal en géométrie différentielle.

Nous privilégions les méthodes reposant sur l'action des isométries à celles purement géométriques.

Les paragraphes 3 et 4 contiennent peu d'exemples et le lecteur souhaitant rencontrer des groupes fuchsiens avant d'en étudier les propriétés est invité à parcourir le chapitre II.

### 1. Préliminaires

Le contexte dans lequel nous nous plaçons est celui du *demi-plan de Poincaré*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\},$$

muni de la métrique riemannienne, dite *hyperbolique*,  $g$  qui, à un point  $z$  de  $\mathbb{H}$  et à deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  du plan tangent  $T_z \mathbb{H}$  de  $z$ , associe le réel

$$g_z(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^2$ .

Cette surface riemannienne est homogène au sens où deux points quelconques sont reliés par une isométrie. Pour le montrer, introduisons le groupe  $G$  des homographies réelles  $h$  définies par

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

où  $a, b, c, d$ , sont des réels vérifiant  $ad - bc = 1$ . Pour tout point  $z$  de  $\mathbb{H}$ , on a

$$\operatorname{Im} h(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2},$$

donc  $G$  agit sur  $\mathbb{H}$ .

Cette action est transitive car  $G$  contient toutes les transformations de la forme  $az + b$ , avec  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Elle se prolonge naturellement au fibré tangent  $T\mathbb{H}$  de  $\mathbb{H}$  de la façon suivante :

$$h(z, \vec{u}) = (h(z), T_z h(\vec{u})).$$

Si l'on explicite cette expression on obtient

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{et} \quad T_z h(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{(cz + d)^2},$$

où la multiplication de  $\vec{u}$  par un nombre complexe représente l'image de ce vecteur par la similitude vectorielle associée à ce nombre (figure 1).

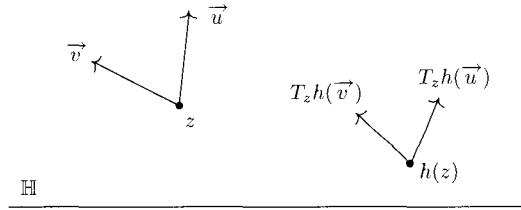


FIGURE 1

On déduit de cette expression que  $G$  préserve l'orientation des plans tangents induite par celle de  $\mathbb{R}^2$ , et que l'on a l'égalité

$$g_{h(z)}(T_z h(\vec{u}), T_z h(\vec{v})) = g_z(\vec{u}, \vec{v}).$$

Le groupe  $G$  est donc inclus dans le groupe des isométries de  $\mathbb{H}$  préservant l'orientation, que nous appelons plus simplement groupe des isométries *positives*. Nous verrons dans le prochain paragraphe que ces deux groupes sont égaux.

La métrique  $g$  et la métrique euclidienne sur  $\mathbb{H}$  sont *conformes*, puisque pour tout  $z$  le produit scalaire  $g_z$  sur  $T_z \mathbb{H}$  est un multiple du produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^2$ . Les isométries positives de  $(\mathbb{H}, g)$  conservent donc les angles orientés au sens euclidien.

À partir de la métrique  $g$ , on définit la *longueur hyperbolique* d'une courbe paramétrée et différentiable par morceaux  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  en posant

$$\operatorname{long}(c) = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}\left(\frac{dc}{ds}(t), \frac{dc}{ds}(t)\right)} dt,$$

et l'*aire hyperbolique* d'un sous-ensemble  $B \subset \mathbb{H}$  en posant

$$\mathcal{A}(B) = \iint_B \frac{dxdy}{y^2},$$

lorsque cette intégrale existe.

Deux paramétrages d'une même courbe géométrique différentiable  $C$  ayant même longueur, on peut parler de la *longueur hyperbolique* de  $C$ .

Remarquons que la longueur hyperbolique du segment  $[ib, a + ib]$  avec  $b > 0$  est égale à  $|a|/b$ , et que celle du segment  $[i, ib]$  avec  $b > 0$  est  $|\ln b|$ .

Nous allons maintenant définir une distance sur  $\mathbb{H}$  et nous intéresser aux géodésiques.

**1.1. Distance et géodésiques.** Soient  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{H}$ . Posons

$$d(z, z') = \inf_S \text{long}(c),$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble  $S$  des courbes paramétrées différentiables par morceaux de  $\mathbb{H}$ , dont les extrémités sont  $z$  et  $z'$ .

**Proposition 1.1.** *Il existe une unique courbe géométrique  $C$  différentiable par morceaux d'extrémités  $z$  et  $z'$  vérifiant  $\text{long}(C) = d(z, z')$ .*

– Si  $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ , cette courbe est le segment de droite d'extrémités  $z$  et  $z'$ .

– Sinon,  $C$  est l'arc de cercle entre  $z$  et  $z'$  porté par le demi-cercle passant par ces deux points et centré en un réel.

*Démonstration.* Commençons par le cas où  $z = is$  et  $z' = is'$  avec  $s > 0$  et  $s' > 0$ . Soit  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  une courbe différentiable par morceaux d'extrémités  $z$  et  $z'$ . Posons  $c(t) = x(t) + iy(t)$ .

Par définition de la longueur hyperbolique, on a

$$\text{long}(c) \geq \left| \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right|$$

avec l'égalité si et seulement si  $x(t) = 0$ , pour tout  $t$  dans  $[a, b]$ , et  $y'$  est de signe constant. Donc  $\text{long}(c) \geq |\ln(s/s')|$ , avec égalité si et seulement si  $c([a, b])$  est le segment  $[is, is']$ .

Si maintenant  $z$  et  $z'$  sont deux points quelconques, on se ramène au cas précédent en utilisant le fait que  $G$  agit par isométries sur  $\mathbb{H}$  en préservant la famille des demi-droites verticales et des demi-cercles centrés en des réels, et que l'action sur cette famille est transitive.  $\square$

**Définition 1.2.** On appelle géodésique une demi-droite verticale de  $\mathbb{H}$  ou un demi-cercle euclidien de  $\mathbb{H}$  centré en un réel (figure 2).

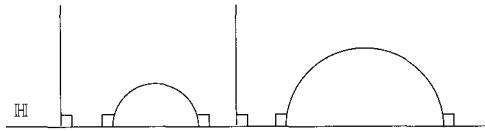


FIGURE 2

Étant donnés deux points  $z$  et  $z'$  de  $\mathbb{H}$ , l'arc de cercle ou le segment d'extrémités  $z$  et  $z'$  porté par la géodésique passant par ces deux points est appelé *segment hyperbolique* et est noté  $[z, z']_h$  (figure 3). Ce segment est donc la plus courte (au sens de la métrique hyperbolique) courbe géométrique différentiable par morceaux d'extrémités  $z$  et  $z'$ .

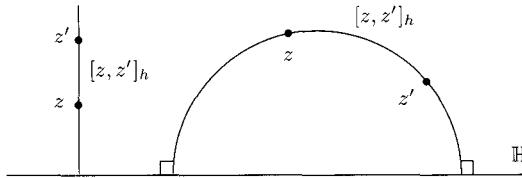


FIGURE 3

**Proposition 1.3.** *L'application  $d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par*

$$d(z, z') = \inf_S \text{long}(c)$$

*est une distance. Pour tout  $h$  dans  $G$  on a*

$$d(h(z), h(z')) = d(z, z').$$

**Exercice 1.4.** Démontrer la proposition 1.3.

Remarquons que pour tous  $t, t' > 0$ , on a  $d(it, it') = |\ln(t/t')|$ . Lorsque  $t$  tend vers 0 ou vers  $+\infty$ , les points  $i$  et  $it$  s'éloignent donc l'un de l'autre. En revanche,  $d(it, it + 1)$  est inférieur à  $1/t$  donc les points  $it$  et  $it + 1$  se rapprochent lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

L'exercice suivant propose une formule reliant la distance hyperbolique à la distance euclidienne. On note  $\text{sh}$  la fonction sinus hyperbolique définie pour tout réel  $x$  par

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

**Exercice 1.5.** Soient  $z$  et  $z'$  deux points différents de  $\mathbb{H}$ . Démontrer la formule suivante :

$$\text{sh}\left(\frac{1}{2}d(z, z')\right) = \frac{|z - z'|}{2(\text{Im } z \text{ Im } z')^{1/2}}.$$

(Indication : se ramener au cas où  $z$  et  $z'$  sont imaginaires purs, [36, Theorem 1.2.6].)

On appelle  *cercle hyperbolique* de centre  $z \in \mathbb{H}$  et de rayon  $r > 0$ , l'ensemble des  $z'$  de  $\mathbb{H}$  tels que  $d(z, z') = r$ .

**Exercice 1.6.** Démontrer que le cercle hyperbolique de centre  $z = a + ib$  et de rayon  $r > 0$  est le cercle euclidien de diamètre  $[a + ibe^r, a + ibe^{-r}]$  et que sa circonférence hyperbolique est  $2\pi \operatorname{sh} r$ .

Notons  $K(z)$  la *courbure de Gauss* en un point  $z$  de  $\mathbb{H}$ . Par définition,  $K(z)$  mesure la différence entre la circonférence,  $c(r)$ , du cercle hyperbolique centré en  $z$  et de rayon  $r$  petit, et celle du cercle euclidien centré en  $z$  de même rayon. Plus précisément, on a [8, 10.5.1.3]

$$K(z) = -\frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} (c(r) - 2\pi r),$$

donc  $K(z) = -1$ .

**Exercice 1.7.** Soient  $z$  et  $z'$  deux points différents de  $\mathbb{H}$ . Démontrer que l'ensemble des  $z''$  de  $\mathbb{H}$  vérifiant  $d(z'', z) = d(z'', z')$  est la géodésique passant par le milieu hyperbolique de  $[z, z']_h$ , orthogonale à ce segment hyperbolique.

À partir de  $d$ , on construit une distance sur le fibré unitaire tangent  $T^1\mathbb{H}$  de  $\mathbb{H}$ . Avant de la définir, introduisons des notations.

Soit  $v = (z, \vec{v})$  un élément de  $T^1\mathbb{H}$ . On note  $(v(t))_{t \in \mathbb{R}}$  le paramétrage par longueur (hyperbolique) d'arcs (*i.e.*  $d(v(t), v(t')) = |t - t'|$ ) de l'unique géodésique passant par  $z$  vérifiant  $v(0) = z$  et  $dv/dt(0) = \vec{v}$  (figure 4).

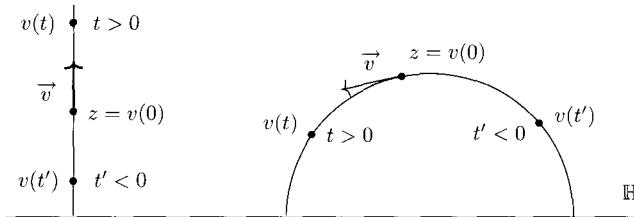


FIGURE 4

À deux éléments  $v$  et  $v'$  de  $T^1\mathbb{H}$ , on associe la fonction  $f_{v,v'}(t)$  définie par

$$f_{v,v'}(t) = d(v(t), v'(t))e^{-|t|}.$$

On a l'inégalité

$$f_{v,v'}(t) \leq (2|t| + d(v(0), v'(0)))e^{-|t|}$$

donc cette fonction est intégrable.

**Exercice 1.8.** Démontrer que l'application  $D : T^1\mathbb{H} \times T^1\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$D(v, v') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} d(v(t), v'(t)) dt,$$

est une distance invariante par  $G$ .

**1.2. Compactification de  $\mathbb{H}$ .** La topologie induite par  $d$  sur  $\mathbb{H}$  est la même que celle induite par la distance euclidienne. Pour cette topologie,  $\mathbb{H}$  n'est pas compact. Nous allons le compactifier en lui ajoutant un *bord à l'infini*  $\mathbb{H}(\infty) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , et en munissant  $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$  d'une topologie qui, en restriction à  $\mathbb{H}$ , sera celle induite par  $d$ . Pour cela, on définit un ouvert de  $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$  comme étant ou bien un ouvert de  $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$  (relativement à la topologie induite par la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ ) ou bien la réunion du point  $\infty$  et du complémentaire d'un compact de  $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ .

**Exercice 1.9.** Démontrer que  $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$  muni de cette topologie est compact.

Soit  $A$  un ensemble inclus dans  $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$ . On note  $\overset{\circ}{A}$  son intérieur et  $\overline{A}$  son adhérence.

**Définition 1.10.** On appelle bord à l'infini de  $A$ , l'ensemble, noté  $A(\infty)$ , défini par

$$A(\infty) = \overline{A} \cap \mathbb{H}(\infty).$$

Le bord à l'infini d'une géodésique est un ensemble à deux éléments que l'on appelle *extrémités de la géodésique*. Remarquons qu'une géodésique est déterminée par ses extrémités et qu'une géodésique est une demi-droite verticale si et seulement si l'une de ses extrémités est le point  $\infty$ .

Soient  $x^-$  et  $x^+$  deux points différents de  $\mathbb{H}(\infty)$ . On note  $(x^- x^+)$  la géodésique d'extrémités  $x^-$ ,  $x^+$ , orientée de  $x^-$  vers  $x^+$ . Si  $z$  appartient à  $\mathbb{H}$ , le rayon géodésique d'origine  $z$  et d'extrémité  $x^+$  est noté  $[z, x^+)$  (figure 5).

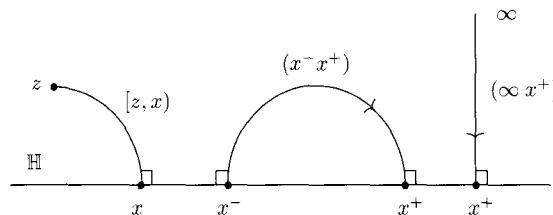


FIGURE 5

Une géodésique sépare  $\mathbb{H}$  en deux composantes connexes. Chacune de ces composantes est appelée *demi-plan*.

Par définition, un *triangle hyperbolique*  $T$  est l'intersection de trois demi-plans fermés, dont l'aire hyperbolique est finie et non nulle.

**Exercice 1.11.** Soient  $T$  un triangle hyperbolique et  $F$  l'intersection de la frontière de  $T$  avec  $\mathbb{H}$  (figure 6). Démontrer que  $T(\infty)$  contient au plus trois points. Démontrer que

- si  $T(\infty) = \{x_1, x_2, x_3\}$  alors  $F = (x_1x_2) \cup (x_2x_3) \cup (x_3x_1)$  et  $\mathcal{A}(T) = \pi$ ,
- si  $T(\infty) = \{x_1, x_2\}$  alors  $F = (x_1, z] \cup [z, x_2) \cup (x_2, x_1)$ , avec  $z \in \mathbb{H}$ , et  $\mathcal{A}(T) = \pi - \alpha$ , où  $\alpha$  est la mesure de l'angle géométrique en  $z$ ,
- si  $T(\infty) = \{x\}$  alors  $F = (x, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, x)$  et  $\mathcal{A}(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2)$ ,
- si  $T(\infty) = \emptyset$  alors

$$F = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1] \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

(Indication : [36, Theorem 1.4.2].)

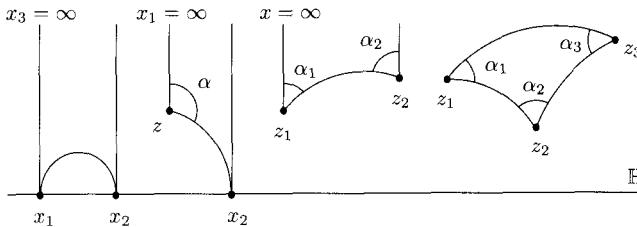


FIGURE 6

L'action du groupe  $G$  sur  $\mathbb{H}$  se prolonge en une action par homéomorphismes sur  $\mathbb{H}(\infty)$  définie, pour  $g(z) = (az + b)/(cz + d)$  et  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , par

- si  $c = 0$ , alors  $g(\infty) = \infty$  et  $g(x) = (ax + b)/d$ ,
- si  $c \neq 0$ , alors  $g(\infty) = a/c$ ,  $g(-d/c) = \infty$  et, si  $x \neq -d/c$ , alors  $g(x) = (ax + b)/(cx + d)$ .

**Exercice 1.12.** Démontrer que l'action ci-dessus est conjuguée à l'action projective de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  sur la droite projective  $\mathbb{RP}^1$  par l'homéomorphisme de  $\mathbb{H}(\infty)$  sur  $\mathbb{RP}^1$  qui à un réel  $x$  associe  $\mathbb{R}^*(\frac{x}{1})$ , et au point  $\infty$  associe  $\mathbb{R}^*(\frac{1}{0})$ .

**1.3. Cocycles de Busemann et horocycles.** L'idée est maintenant de se placer en un point  $x$  de  $\mathbb{H}(\infty)$  et d'observer les points de  $\mathbb{H}$  à partir de  $x$ . Pour cela, nous allons associer à deux points  $z$  et  $z'$  de  $\mathbb{H}$ , une quantité algébrique reflétant la position relative de ces deux points, vus de  $x$ .

Notons  $(r(t))_{t \geq 0}$  le paramétrage par longueur d'arcs du rayon géodésique  $[z, x)$  et posons  $f(t) = d(z, r(t)) - d(z', r(t))$ .

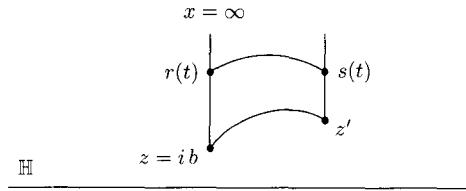


FIGURE 7

Montrons que  $f$  admet une limite en  $+\infty$ . Commençons par le cas où  $x = \infty$  et  $z = ib$ . Posons  $z' = a' + ib'$  et  $s(t) = a' + ibe^t$  (figure 7). Pour  $t$  grand, on a

$$d(s(t), z') = \ln(b/b') + t,$$

donc

$$f(t) = d(s(t), z') - d(z', r(t)) + \ln(b'/b).$$

Par ailleurs  $d(s(t), r(t)) \leq |a'|/be^t$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ln(b'/b)$ .

Remarquons que cette limite ne dépend pas de  $a'$ , et que si  $a' = 0$  alors elle est égale à  $d(z, z')$ , si  $b' \geq b$  et à  $-d(z, z')$  sinon. Si  $x = \infty$  et  $z$  est quelconque, on se ramène au cas précédent par une translation. Si  $x$  est différent du point  $\infty$ , on se ramène également à ce cas, en utilisant l'homographie

$$h(z) = \frac{xz - x^2 - 1}{z - x}.$$

En conclusion, la fonction  $f$  admet une limite en  $+\infty$ . Cette limite est appelée *cocycle de Busemann* centré en  $x$ , calculé en  $z, z'$ , et est notée  $B_x(z, z')$  (figure 8).

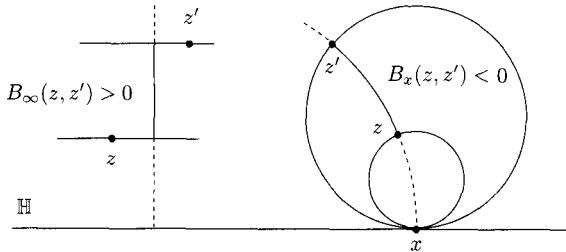


FIGURE 8

**Propriété 1.13.** Soient  $g$  dans  $G$ ,  $x$  dans  $\mathbb{H}$ , et  $z, z', z''$  dans  $\mathbb{H}$ . On a :

- (i)  $B_{g(x)}(g(z), g(z')) = B_x(z, z')$  ;
- (ii)  $B_x(z, z') = B_x(z, z'') + B_x(z'', z')$  ;
- (iii)  $-d(z, z') \leq B_x(z, z') \leq d(z, z')$  ;
- (iv)  $B_x(z, z') = d(z, z')$  (resp.  $-d(z, z')$ ) si et seulement si  $z'$  appartient au rayon  $[z, x]$  (resp.  $z \in [z', x]$ ).

**Exercice 1.14.** Démontrer les propriétés 1.13.

(Indication : pour (ii), (iii), (iv) se ramener au cas où  $x = \infty$ .)

Pour tout  $t > 0$ , posons

$$H_t(x) = \{z \in \mathbb{H} \mid B_x(i, z) = \ln t\} \quad \text{et} \quad H_t^+(x) = \{z \in \mathbb{H} \mid B_x(i, z) \geq \ln t\}.$$

Si  $x = \infty$ , alors l'ensemble  $H_t(\infty)$  est la droite horizontale définie par  $\text{Im } z = t$ , et  $H_t^+(\infty)$  est le demi-plan supérieur fermé dans  $\mathbb{H}$ , bordé par cette droite.

Sinon, considérons  $g$  dans  $G$  vérifiant  $g(\infty) = x$ , d'après les propriétés 1.13(i) et (ii), on a

$$H_t(x) = g(H_{t'}(\infty)) \quad \text{avec } t' = te^{-B_x(i, g(i))}.$$

Par conséquent,  $H_t(x)$  est un cercle tangent à l'axe réel en  $x$ , et  $H_t^+(x)$  est le disque fermé dans  $\mathbb{H}$  délimité par ce cercle (figure 9).

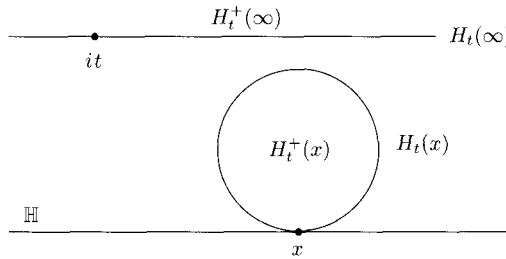


FIGURE 9

Les ensembles  $H_t(x)$  (resp.  $H_t^+(x)$ ) sont appelés *horocycles* (resp. *horodisques*). Historiquement c'est le mot *horicycle* qui était employé.

**1.4. Disque de Poincaré.** Pour terminer ce paragraphe, introduisons une surface riemannienne isométrique à  $(\mathbb{H}, g)$ . Dans la suite du texte, nous privilégierons un modèle sur l'autre en fonction de la situation rencontrée.

Considérons le disque ouvert unité  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  et l'application  $\psi$  de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{D}$  définie par

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto i \frac{z - i}{z + i}. \end{aligned}$$

Cette application est un difféomorphisme, notons encore  $g$  la métrique riemannienne sur  $\mathbb{D}$  obtenue par transport par  $\psi$  de la métrique hyperbolique sur  $\mathbb{H}$ .

## INDEX

- aire hyperbolique, 3  
cocycle de Busemann, 8, 128  
conjecture d'Oppenheim, 158  
conjecture de Hardy-Littlewood, 158  
cuspide, 27  
développement en fractions continues, 62  
domaine de Dirichlet, 17  
ensemble limite, 20  
ensemble non errant, 80, 114  
feuilletage fortement stable, 120  
flot, 75  
flot géodésique, 77, 78, 130, 132  
flot horocyclique, 107, 109, 135, 136  
forme bilinéaire de Lorentz, 123  
géodésique, 3, 88, 125  
groupe de congruence modulo 2, 56  
groupe de Schottky, 40  
groupe de Schottky généralisé, 43  
groupe fuchsien, 16  
groupe fuchsien élémentaire, 21  
groupe fuchsien convexe-cocompact, 30  
groupe fuchsien géométriquement fini, 30  
groupe kleinien, 36  
groupe lorentzien, 128  
groupe modulaire, 53  
horocycle, 9, 128  
horodisque, 9  
isométrie elliptique, 13, 126  
isométrie hyperbolique, 13, 126  
isométrie parabolique, 13, 126  
isométries positives, 11, 125  
lemme du ping-pong, 73  
ligne de Farey, 63  
longueur hyperbolique, 2  
mélange topologique, 91  
mesure de Patterson, 38  
nombre d'or, 72, 149  
pavage de Farey, 62  
point conique, 23  
point divergent, 76  
point errant, 75  
point géométriquement mal approché, 144  
point horocyclique, 22  
point parabolique, 24  
réel mal approché, 150  
réel quadratique, 70  
région de Nielsen, 29  
série de Poincaré, 38  
semi-flot, 75  
semi-trajectoire, 75  
spectre de Markov, 157  
spectre des longueurs, 88  
théorème de Khintchine, 158  
trajectoire, 75  
variété de Hadamard pincée, 36