



C O L L E C T I O N
DIRIGÉE PAR JEAN BORNAREL

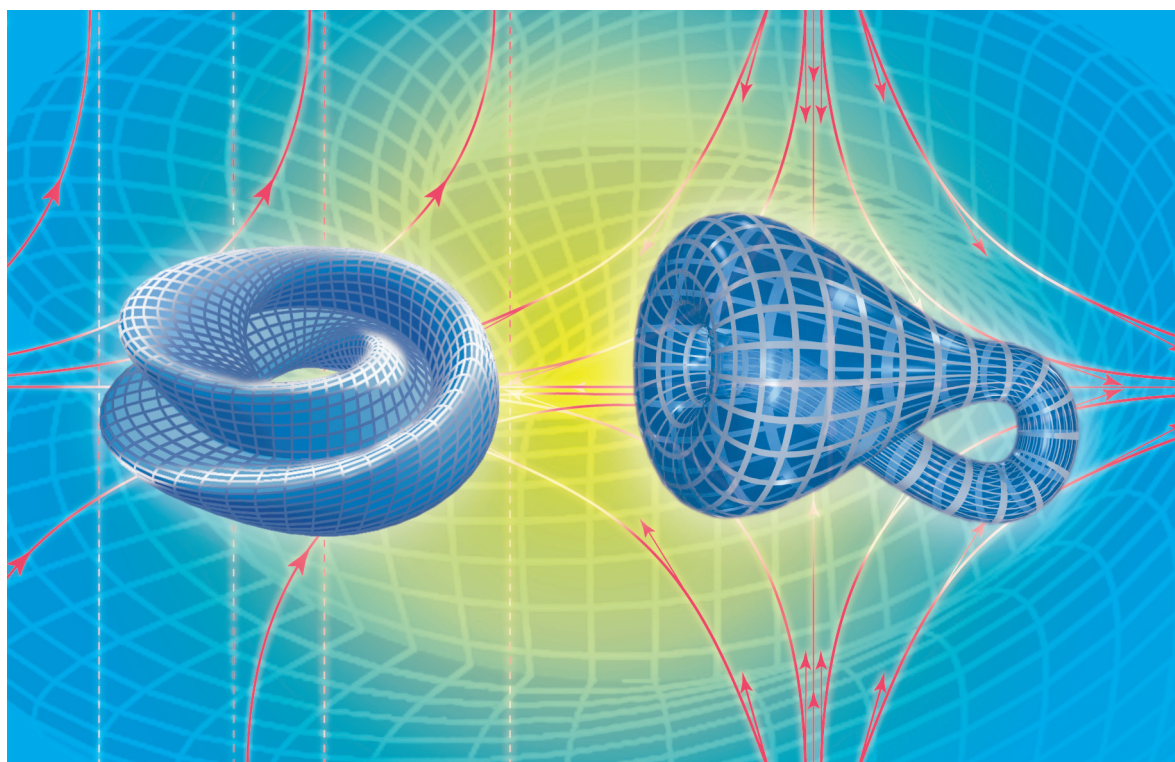
G R E N O B L E

S C I E N C E S

INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

Nouvelle édition

■ Jacques LAFONTAINE



INTRODUCTION
AUX VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES
nouvelle édition

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences est un centre de conseil, expertise et labellisation de l'enseignement supérieur français. Il expertise les projets scientifiques des auteurs dans une démarche à plusieurs niveaux (référés anonymes, comité de lecture interactif) qui permet la labellisation des meilleurs projets après leur optimisation. Les ouvrages labellisés dans une collection de Grenoble Sciences ou portant la mention « Sélectionné par Grenoble Sciences » (« *Selected by Grenoble Sciences* ») correspondent à :

- » des projets clairement définis sans contrainte de mode ou de programme,
- » des qualités scientifiques et pédagogiques certifiées par le mode de sélection (les membres du comité de lecture interactif sont cités au début de l'ouvrage),
- » une qualité de réalisation certifiée par le centre technique de Grenoble Sciences.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

On peut mieux connaître Grenoble Sciences en visitant le site web :

<http://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

On peut également contacter directement Grenoble Sciences :

Tél (33) 4 76 51 46 95, e-mail : *grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr*

Livres et pap-ebooks

Grenoble Sciences labellise des livres papier (en langue française et en langue anglaise) mais également des ouvrages utilisant d'autres supports. Dans ce contexte, situons le concept de **pap-ebook** qui se compose de deux éléments :

- » un **livre papier** qui demeure l'objet central avec toutes les qualités que l'on connaît au livre papier
- » un site **web corrélé** ou site **web compagnon** qui propose :
 - › des éléments permettant de combler les lacunes du lecteur qui ne posséderait pas les prérequis nécessaires à une utilisation optimale de l'ouvrage
 - › des exercices de training
 - › des compléments permettant d'approfondir, de trouver des liens sur internet, etc.

Le livre du **pap-ebook** est autosuffisant et certains lecteurs n'utiliseront pas le site web compagnon. D'autres pourront l'utiliser, et chacun à sa manière. Un livre qui fait partie d'un **pap-ebook** porte en première de couverture un logo caractéristique et le lecteur trouvera le site compagnon à l'adresse internet suivante :

[http://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook/nom de l'auteur du livre](http://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook/nom%20de%20l'auteur%20du%20livre)

Grenoble Sciences bénéficie du soutien du **Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche** et de la **Région Rhône-Alpes**
Grenoble Sciences est rattaché à l'**Université Joseph Fourier de Grenoble**

**INTRODUCTION
AUX VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES**

nouvelle édition

Jacques LAFONTAINE



17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112
91944 Les Ulis Cedex A - France

Introduction aux variétés différentielles

Cet ouvrage est labellisé par Grenoble Sciences, est un des titres du secteur Mathématiques de la Collection Grenoble Sciences d'EDP Sciences, qui regroupe des projets originaux et de qualité. Cette collection est dirigée par **Jean BORNAREL**, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Comité de lecture de l'ouvrage

- › **Pierre AVERBUCH**, Directeur de recherche honoraire au CNRS, Grenoble
- › **Pierre BERARD**, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble I
- › **Gaël MEIGNIEZ**, Professeur à l'Université de Bretagne Sud
- › **Jean-Yves MERINDOL**, Professeur, Directeur de l'ENS Cachan

Cette nouvelle édition d'*Introduction aux variétés différentielles* de Jacques LAFONTAINE a été suivie par Laura CAPOLO pour la partie scientifique et par Anne-Laure PASSAVANT et Sylvie BORDAGE du centre technique Grenoble Sciences pour sa réalisation pratique.

L'illustration de couverture est l'œuvre d'Alice GIRAUD, d'après : Thomas BANCHOFF & Jeff BEALL, Brown University : Bouteille de KLEIN ; Fropuff/ Inductiveloading, Wikimedia commons : Immersion « 8 » de la bouteille de KLEIN ; éléments fournis par l'auteur.

Autres ouvrages labellisés sur des thèmes proches (chez le même éditeur)

Analyse numérique et équations différentielles (Jean-Pierre Demailly) • *Analyse statistique des données expérimentales* (Konstantin Protassov) • *Approximation Hilbertienne* (Marc Attéia et Jean Gaches) • *Description de la symétrie* (Jean Sivardière) • *Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours - Tome I* (Daniel Alibert) • *Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours - Tome II* (Daniel Alibert) • *Mathématiques pour l'étudiant scientifique - Tome I* (Philippe-Jacques Haug) • *Mathématiques pour l'étudiant scientifique - Tome II* (Philippe-Jacques Haug) • *Mathématiques Pour les Sciences de la Vie, de la Nature et de la Santé* (Jean Paul et Françoise Bertrandias) • *Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur* (Jean-Philippe Grivet) • *Nombres et algèbre* (Jean-Yves Mérindol) • *Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs* (E. Belorizky)

et d'autres titres sur le site internet :

<http://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

ISBN 978-2-7598-0572-3

© EDP Sciences, 2010

Pour David,

This page intentionally left blank

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	I
Comment utiliser cet ouvrage pap-ebook	1
Introduction	3
Notations	7
Chapitre 1. Calcul différentiel	9
1.1. Introduction	9
1.1.1. Qu'est-ce que le calcul différentiel ?	9
1.1.2. Résumé	11
1.2. Différentielles	12
1.2.1. Définition et propriétés de base	12
1.2.2. Trois exemples fondamentaux	15
1.2.3. Fonctions de classe C^p	17
1.3. Théorème des fonctions composées	18
1.4. Inversion locale	21
1.4.1. Difféomorphismes	21
1.4.2. Difféomorphismes locaux	23
1.4.3. Immersions, submersions	24
1.5. Sous-variétés	27
1.5.1. Propriétés de base	27
1.5.2. Exemples : sphères, tores, groupe orthogonal	30
1.5.3. Paramétrisations	31
1.5.4. Vecteurs tangents, espace tangent	32
1.6. Sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire	35
1.7. Points critiques	38
1.8. Valeurs critiques	41

1.9. Calcul différentiel en dimension infinie	43
1.10. Commentaires	45
1.11. Exercices	47
Chapitre 2. Notions de base sur les variétés	53
2.1. Introduction	53
2.1.1. Un exemple typique : les droites du plan	53
2.1.2. Résumé	54
2.2. Cartes, atlas	55
2.2.1. Des variétés topologiques aux variétés lisses	55
2.2.2. Premiers exemples	58
2.3. Fonctions différentiables ; difféomorphismes	59
2.4. Le théorème de d'Alembert	63
2.5. Les espaces projectifs	64
2.6. L'espace vectoriel tangent ; applications	69
2.6.1. Espace tangent, application linéaire tangente	69
2.6.2. Difféomorphismes locaux, immersions, submersions, sous-variétés	71
2.7. Revêtements	75
2.7.1. Quotient d'une variété par un groupe	75
2.7.2. Simple connexité	82
2.8. Dénombrabilité à l'infini	84
2.9. Commentaires	86
2.10. Exercices	88
Chapitre 3. Du local au global	97
3.1. Introduction	97
3.2. Fonctions plateau ; plongements de variétés	98
3.3. Dérivations	103
3.3.1. Dérivations ponctuelles	103
3.3.2. Un autre point de vue sur l'espace tangent	105
3.3.3. Dérivations globales	107
3.4. Image d'un champ de vecteurs ; crochet	109
3.5. Le fibré tangent	111

3.5.1. La variété des vecteurs tangents	111
3.5.2. Fibrés vectoriels	113
3.5.3. Champs de vecteurs sur les variétés ; hessien	115
3.6. Le flot d'un champ de vecteurs	117
3.7. Champs de vecteurs dépendant du temps	125
3.8. Variétés de dimension un	128
3.9. Commentaires	130
3.10. Exercices	134
Chapitre 4. Autour des groupes de Lie	143
4.1. Introduction	143
4.2. Champs invariants à gauche	144
4.3. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie	149
4.3.1. Propriétés de base ; représentation adjointe	149
4.3.2. Des groupes aux algèbres	152
4.3.3. Des algèbres aux groupes	153
4.4. Digression sur les groupes topologiques	156
4.5. Groupes de Lie commutatifs	162
4.5.1. Un théorème de structure	162
4.5.2. Courbes elliptiques	164
4.6. Espaces homogènes	165
4.7. Commentaires	169
4.8. Exercices	171
Chapitre 5. Formes différentielles	177
5.1. Introduction	177
5.1.1. Des formes différentielles, pourquoi ?	177
5.1.2. Résumé	178
5.2. Algèbre multilinéaire	179
5.2.1. Algèbre tensorielle	179
5.2.2. Algèbre extérieure	181
5.2.3. Application : la grassmannienne des 2-plans en dimension	185
5.3. Cas des ouverts d'un espace numérique	186

5.3.1. Formes de degré 1	186
5.3.2. Formes de degré quelconque	188
5.4. Différentielle extérieure	190
5.5. Produit intérieur, dérivée de Lie	194
5.6. Le lemme de Poincaré	199
5.6.1. Ouverts étoilés	199
5.6.2. Formes dépendant d'un paramètre	202
5.7. Formes différentielles sur une variété	203
5.8. Équations de Maxwell	207
5.8.1. Espace de Minkowski	208
5.8.2. Le champ électro-magnétique vu comme une forme différentielle	208
5.8.3. Champ électromagnétique et groupe de Lorentz	209
5.9. Commentaires	211
5.10. Exercices	214
Chapitre 6. Intégration et applications	223
6.1. Introduction	223
6.2. Orientation : des espaces vectoriels aux variétés	225
6.2.1. Atlas d'orientation	225
6.2.2. Formes volume	226
6.2.3. Revêtement des orientations	230
6.3. Intégration sur les variétés ; une première application	231
6.3.1. Intégrale d'une forme différentielle de degré maximum	231
6.3.2. Le théorème de la boule chevelue	233
6.4. Théorème de Stokes	235
6.4.1. Intégration sur les parties compactes	235
6.4.2. Les domaines réguliers et leur bord	236
6.4.3. La formule de Stokes dans tous ses états	239
6.5. Forme volume canonique d'une sous-variété de l'espace euclidien	243
6.6. Le théorème de Brouwer	247
6.7. Commentaires	250
6.8. Exercices	251

Chapitre 7. Cohomologie et théorie du degré	257
7.1. Introduction	257
7.2. Espaces de de Rham	259
7.3. Cohomologie en degré maximum	260
7.4. Degré d'une application	264
7.4.1. Cas du cercle	264
7.4.2. Définition et propriétés de base dans le cas général	266
7.4.3. Invariance du degré par homotopie; applications	268
7.4.4. Indice d'un champ de vecteurs	271
7.5. Retrouver sur le théorème de d'Alembert	273
7.5.1. Deux preuves du théorème de d'Alembert utilisant le degré	273
7.5.2. Comparaison des différentes preuves du théorème de d'Alembert	275
7.6. Enlacement	276
7.7. Invariance par homotopie	280
7.8. Le principe de Mayer–Vietoris	283
7.8.1. Suites exactes	283
7.8.2. La suite exacte de Mayer–Vietoris	285
7.8.3. Application : quelques calculs de cohomologie	287
7.8.4. Cas non compact	289
7.9. Méthodes intégrales	290
7.10. Commentaires	293
7.11. Exercices	294
 Chapitre 8. Caractéristique d'Euler–Poincaré et théorème de Gauss–Bonnet	 303
8.1. Introduction	303
8.1.1. D'Euclide à Carl–Friedrich Gauss et Pierre–Ossian Bonnet	303
8.1.2. Esquisse d'une preuve du théorème de Gauss–Bonnet	305
8.1.3. Résumé	305
8.2. Caractéristique d'Euler–Poincaré	306
8.2.1. Définition; additivité	306
8.2.2. Pavages	307
8.3. Invitation à la géométrie riemannienne	310

8.4. Le théorème de Poincaré–Hopf	314
8.4.1. Retour sur l’indice d’un champ de vecteurs	314
8.4.2. Un théorème des résidus	315
8.5. De Poincaré–Hopf à Gauss–Bonnet	317
8.5.1. Avec le théorème de classification des surfaces	317
8.5.2. Avec les pavages : idée de la preuve	319
8.5.3. Mise en forme des arguments précédents	320
8.6. Commentaires	322
8.6.1. Cas des surfaces plongées	322
8.6.2. Métriques riemanniennes canoniques sur les surfaces	323
8.6.3. Indications sur les dimensions supérieures	323
8.7. Exercices	324
Annexe	327
Solution d’exercices	329
Bibliographie	359
Index	367

COMMENT UTILISER CET OUVRAGE PAP-EBOOK (LIVRE + SITE WEB) ?

Introduction aux variétés différentielles est **avant tout un livre** avec tous ses atouts et le lecteur trouvera ci-après un descriptif succinct.

Mais il est aussi un **pap-ebook de Grenoble Sciences**, c'est-à-dire un livre enrichi par un site web qui lui est corrélé. Sur ce site web le lecteur trouvera :

- des éléments pour combler ses lacunes de prérequis,
- des exercices et des corrigés permettant de s'entraîner et quelques développements,
- des approfondissements et parfois des pistes bibliographiques pour ceux qui désirent aller plus loin.

Le site s'enrichit au cours du temps en fonction des suggestions. L'adresse de ce site compagnon est :

`http://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook/lafontaine`

Le livre (et son site) est réalisé à destination de lecteurs variés. Ils trouveront donc des préliminaires, des détails techniques, des compléments souvent omis dans les ouvrages ciblés sur un seul public.

Le premier chapitre et une bonne part des chapitres 5 et 6 forment un exposé relativement complet de **calcul différentiel classique**, du b.a.-ba à la formule de Stokes.

Le chapitre 2 a l'ambition de faire comprendre ce que sont les **variétés différentielles** et comment s'en servir à celles et ceux à qui cette notion fait peur, qu'ils la jugent trop abstraite ou trop technique.

Le chapitre 3 est plus technique, précisément parce qu'il expose des **techniques** trop souvent passées sous silence.

Les deux derniers chapitres peuvent être abordés directement dès que l'on maîtrise peu ou prou les notions de variété et de forme différentielle.

Notons aussi que quelqu'un qui, à partir du mot "holomorphe" dans l'index, ferait tous les exercices auquel ce mot fait référence, en tirerait une bonne sensibilisation au monde si différent des variétés complexes.

A l'occasion de cette deuxième édition, le pap-ebook est devenu complètement auto-suffisant en ce qui concerne le calcul différentiel proprement dit. Mais il est vain de parler de variétés sans faire de topologie. Il est donc très brièvement question de simple connexité et de revêtements. Sur ces points, le site web devrait apporter les compléments nécessaires. Les lecteurs peuvent d'ailleurs adresser à Grenoble Sciences des suggestions pour enrichir le site web compagnon. Elles seront exploitées dans la mesure du possible.

INTRODUCTION

C'est à ce coup que Fontanet eut une troisième conception. Il s'écria :

– Composons une *Histoire de France*, avec tous les détails, en cinquante volumes.

Cette proposition m'enchantait, et je l'accueillis avec des battements de mains et des cris de joie...

On nous envoya coucher. Mais je restai bien un quart d'heure dans mon lit sans dormir, tant j'étais agité par la pensée sublime d'une *Histoire de France* en cinquante volumes, avec tous les détails.

Nous la commençâmes, cette histoire. Je ne sais, ma foi, plus pourquoi nous la commençâmes par le roi Teutobochus. Mais telle était l'exigence de notre plan. Notre premier chapitre nous mit en présence du roi Teutobochus, qui était haut de trente pieds, comme on put s'en assurer en mesurant ses ossements, retrouvés par hasard.¹ Dès le premier pas, affronter un tel géant ! Fontanet lui-même en fut étonné.

– Il faut sauter par-dessus Teutobochus, me dit-il.

Je n'osai point.

L'*Histoire de France* en cinquante volumes s'arrêta à Teutobochus.

Anatole France, *Le Livre de mon ami*.

Cette charmante leçon de méthodologie s'applique fort bien au sujet de ce livre. Au lecteur de juger du parti que j'en ai tiré. Les premiers pas de la théorie des variétés peuvent, si l'on veut suivre l'exemple de Fontanet, donner lieu à des développements redoutables. On risque d'être rebuté par le sujet avant de s'apercevoir que les vraies difficultés sont ailleurs.

Les variétés différentielles sont la généralisation naturelle des courbes et des surfaces. La notion de variété apparaît pour la première fois (sans explications !) dans la leçon inaugurale de Riemann, en 1851, et lui permet de donner une solution satisfaisante au problème du prolongement analytique des fonctions holomorphes.

Il faut attendre un bon demi-siècle pour qu'une définition précise se dégage. Il s'agit de concevoir non pas des parties d'un espace $\mathbf{R}^n$, avec n grand, définies par un certain nombre d'équations, mais d'une façon plus abstraite des objets – a priori non plongés dans l'espace “ordinaire” de dimension n , – pour lesquels la notion de fonction différentiable ait un sens.

¹ Le lecteur qui mettrait en doute l'existence de Teutobochus est invité à lire *Persistance des géants*, de A. Schnapper (Annales E.S.C. 1986, n°1).

Les raisons pour s'intéresser à de "grandes" dimensions sont nombreuses. L'une des plus évidentes vient peut-être de la mécanique classique. L'espace des configurations d'un système articulé dépend vite de plus de trois paramètres : il en faut déjà six pour un solide.

Le fait qu'il ne soit pas toujours souhaitable de considérer les objets étudiés comme des parties de $\mathbf{R}^n$ est plus caché. Par exemple l'ensemble des directions de l'espace usuel dépend de deux paramètres réels. C'est de façon naturelle une variété de dimension deux, appelée le plan projectif. Il admet certes de nombreuses réalisations comme sous-espace d'un espace euclidien. Mais ces réalisations ne sautent pas aux yeux, et il n'est pas évident non plus d'en trouver une qui soit plus "naturelle" que les autres.

Et dans bien des cas, comme celui des systèmes articulés, où cette réalisation est évidente, on ne l'utilise que relativement peu.

Ces variétés "abstraites" fournissent le cadre mathématique naturel de la mécanique classique (espace des configurations et espace des phases), mais aussi de la relativité générale et de la théorie des particules élémentaires.

J'ai voulu écrire un texte qui, tout en restant élémentaire, aborde les variétés le plus directement possible, en s'intéressant principalement à leurs propriétés topologiques. De ce point de vue, une sphère étirée et/ou bosselée reste une sphère, et même dans le cadre des courbes et des surfaces, on s'intéresse aux propriétés topologiques ou différentielles, et non aux propriétés métriques (longueur, courbure, etc...).

Il suffit au lecteur d'une bonne connaissance des bases du calcul différentiel, et d'un peu de topologie dite "générale". Toutefois, quelques remarques, encadrées par le signe ** font appel à des connaissances plus élaborées. Un premier chapitre est consacré au calcul différentiel classique, exposé de façon à pouvoir s'appliquer le plus directement possible aux variétés.

Les variétés proprement dites sont abordées aux deuxième et troisième chapitres. J'ai essayé de donner le plus vite possible des exemples et des résultats significatifs.

Une classe d'exemples – les groupes de Lie et leurs espaces homogènes – m'a paru largement mériter un chapitre pour elle-même. Les chapitres 5, 6 et 7 sont consacrés aux formes différentielles et au parti qu'on peut en tirer pour comprendre la topologie des variétés. Chaque chapitre dépend des précédents, à une exception près : si les groupes de Lie (chapitre 4) interviennent dans les chapitre qui suivent, c'est seulement à titre d'exemples et à l'occasion d'exercices. Enfin, le dernier chapitre, qui est le principal ajout de cette deuxième édition, traite du théorème de Gauss–Bonnet pour les surfaces. L'un des attraits de ce résultat est la variété des techniques qu'il met en œuvre. Mais surtout, il met en lumière un phénomène qui n'a cessé de me fasciner malgré des années de pratique : l'apparition des nombres entiers – devrait-on dire de la quantification ? – en géométrie.

Chaque chapitre commence par une introduction relativement détaillée dans laquelle je me suis efforcé de donner des motivations et une description informelle du contenu, faisant appel à l'intuition géométrique du lecteur. Une section intitulée "Commentaires" indique les prolongements possibles des sujets abordés.

Comme je l'ai expliqué plus haut, j'ai pris le parti de me limiter pour l'essentiel aux structures différentielles. Sauf dans le dernier chapitre, l'aspect métrique n'est abordé que très occasionnellement, l'aspect symplectique pas du tout. Je me suis un peu rattrapé dans les sections de "Commentaires", et dans la bibliographie commentée qui accompagne ce texte.

Les nombreux exercices (plus de cent cinquante) sont pour la plupart faciles. Ceux qui sont indiqués par une étoile sont un peu plus délicats pour les débutants. Ceux qui portent deux étoiles ne sont pas forcément techniques, mais plutôt du style "il fallait y penser". Beaucoup peuvent être considérés comme des compléments de cours. C'est pourquoi j'ai fait figurer les solutions d'une centaine d'entre eux.

Durant les années où j'ai assuré le cours de géométrie différentielle à Montpellier, j'ai bénéficié d'un public particulièrement agréable, exigeant et attentif, ne ménageant pas les questions. Son attitude m'a vivement encouragé au moment où je préparais les notes qui ont constitué la première moûture de ce livre.

Une fois ce cours soumis à la collection Grenoble Sciences, j'ai profité des très nombreuses remarques et des suggestions stimulantes des membres du comité de lecture, portant sur le fond comme sur les détails. Malgré la diversité des horizons scientifiques et des tempéraments de ces collègues, je ne me suis jamais trouvé dans la situation du meunier cher à mon homonyme. C'est d'ailleurs à l'occasion de cette deuxième édition que les introductions détaillées dont il est question plus haut m'ont été suggérées.

Un grand merci également à Laura Capolo, du service éditorial de Grenoble Sciences, ainsi qu'à Sylvie Bordage et Anne-Laure Passavant, du service technique, pour une excellente atmosphère de travail.

Last, not least, j'ai été profondément influencé par mon maître Marcel Berger.

This page intentionally left blank

NOTATIONS

Il est fait référence à la sous-section (ou à défaut à la section) où la notation apparaît pour la première fois. Faut-il mettre des flèches sur les vecteurs? Vaste débat, que nous avons tranché en mettant des flèches uniquement sur les vecteurs déterminés par deux points : $\overrightarrow{ab}$ désigne le vecteur d'origine a et d'extrémité b .

$\langle, \rangle$	produit scalaire euclidien	
$\otimes$	produit tensoriel (de vecteurs ou de formes)	5.2.1
$\bigotimes$	produit tensoriel (d'espaces ou de fibrés vectoriels)	5.2.1
$\wedge$	produit extérieur	5.2.2
$\bigwedge^k$	puissance extérieure k -ième	5.2.2
$[,]$	crochet de deux champs de vecteurs	3.4
$[x]$	point de $P^n K$ de coordonnées homogènes x	2.5
$\alpha^\sharp$	vecteur associé à la forme α	5.3.1
$v^\flat$	forme associée au vecteur v	5.3.1
$\coprod$	somme ensembliste	3.5.1
Ad	représentation adjointe	4.3
$B(0, r)$	boule ouverte de centre 0 et de rayon r	
$C^k(M)$	fonctions de classe C^k sur M	1.2.3
$C^\infty(M)$	fonctions lisses sur M	1.2.3
$C^\infty(E)$	sections lisses du fibré vectoriel E	3.5.2
$C^\infty(TM)$	champs de vecteurs lisses sur la variété M	3.5.2
d	différentielle extérieure	5.4
$\deg(f)$	degré de l'application f	7.4.1
$\dim$	dimension	
dist	distance	
div	divergence	5.5
E^*	espace dual de l'espace vectoriel E	5.2.1
$E(C, C')$	enlacement de deux courbes C et C'	7.6
f_*	image directe par l'application f	3.4
f^*	image réciproque par l'application f	5.3.2
$f _U$	restriction de f à l'ouvert U	
$\mathcal{F}_m$	germes de fonctions en m	3.3.1

This page intentionally left blank

This page intentionally left blank