

INFORMATION NUMÉRIQUE
Traitement, interprétation, communication

Abdourrahmane M. Atto

Ondelettes et processus stochastiques



Lavoisier
hermes

Présentation

Cet ouvrage propose une analyse contemporaine des probabilités et statistiques dans un contexte de projection de processus aléatoires sur des espaces fonctionnels engendrés par des « ondelettes ». Les ondelettes sont des fonctions pseudo-oscillatoires, bien localisées en temps/espace/fréquence et en ce sens, sont très appréciées comme outils fonctionnels d'analyse de signaux et images numériques ou de recherche d'information dans les données provenant de la finance et des sciences économiques, entre autres.

La présentation de cet ouvrage est choisie de manière à couvrir un spectre assez large d'étudiants en licence/master/doctorat et en sciences de l'ingénieur. De manière plus spécifique, ce livre a pour objectif, une compréhension des structures de dépendances statistiques intrinsèques aux coefficients d'ondelettes de différents processus et champs aléatoires. Une analyse fine de tous les facteurs contribuant à la stationnarité et à la décorrélation des séquences de coefficients de projection est proposée, en fonction des structures de dépendances statistiques intrinsèques au processus décomposé.

Cette analyse met en évidence deux issues pour une même décomposition en ondelettes : certaines fonctions de la base d'ondelettes ont pour effet de casser les dépendances statistiques intrinsèques au processus décomposé tandis que d'autres fonctions concentrent ces dépendances dans des sous-espaces d'ondelettes spécifiques. En pratique, l'identification des sous-espaces d'ondelettes associés à ces deux issues permet de simplifier la sélection de modèles de descriptions statistiques et/ou probabilistes du processus analysé. On montre ainsi que de nombreux champs stochastiques « textures » présents dans les images numériques peuvent être décrits de manière parcimonieuse par le biais de modèles paramétriques associés à leurs séquences de coefficients d'ondelettes. Ces résultats sont exploités pour proposer des méthodes de classification de textures, de recherche de

contenu spécifique dans une base d'images et de détection de changements dans les séries temporelles d'images.

Cet ouvrage est le résultat de 10 années de travaux de recherche et d'enseignements sur l'analyse en ondelettes de processus stochastiques. Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont suivi de près ou de loin ces travaux, en particulier : 1) ceux qui m'ont apporté le soutien moral nécessaire à l'accomplissement de ces travaux et 2) ceux qui se reconnaîtront à la suite d'une étape de calcul ou d'un changement d'application et dont les noms figurent dans les références incluses dans cet ouvrage. Je suis également très reconnaissant à l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) pour les ressources mises à disposition dans le cadre du projet PHOENIX ANR-15-CE23-0012. La simulation numérique de champ stochastique exige du calcul intensif et la synthèse de nombreux champs fractionnaires texturés par intégration récursive de bruit blanc s'est faite en temps réaliste suite à la mise à disposition par l'ANR d'un ordinateur numérique à haute performance. Enfin, je veux exprimer mes sincères remerciements à Olivier Rioul et Céline Poiteaux pour leurs lectures et leurs remarques constructives : leurs conseils ont permis d'améliorer la qualité scientifique et rédactionnelle de cet ouvrage.

A. M. ATTO

Table des matières

Liste des abréviations	xiii
Liste des symboles mathématiques	xv
1 Introduction	1
1.1 Contexte	1
1.2 Objectif et plan du livre	2
I Processus stochastiques	5
2 Généralités	7
2.1 Notions de mesure et d'intégration	7
2.2 Espaces fonctionnels et convergence	12
2.3 Opérateurs et représentations dans les espaces de Hilbert . .	15
2.3.1 Frames	15
2.3.2 Base de Riesz - Analyse multirésolution	23
2.4 Variables aléatoires	26
3 Entropies de variables aléatoires	33
3.1 Entropie d'une variable aléatoire	33
3.2 Entropie croisée de variables aléatoires	35
3.3 Entropie relative de variables aléatoires	43
3.3.1 Entropie relative de modèles paramétriques	44

3.3.2	Entropie relative d'approximations d'Edgeworth	47
4	Processus stochastiques	51
4.1	Processus et champs stochastiques	51
4.1.1	Généralités sur les processus stochastiques	51
4.1.2	Généralités sur les champs spatiaux	54
4.2	Séquences de variables indépendantes	55
4.2.1	Contexte	55
4.2.2	Barycentre de séquence de variables aléatoires	58
4.2.3	Barycentre de séquence de processus stochastiques	62
4.3	Intégrales discrètes entières et fractionnaires	63
4.3.1	Processus stochastique intégrale entière	63
4.3.2	Processus stochastique intégrale fractionnaire	67
4.3.3	Champ stochastique discret intégrale fractionnaire	70
4.4	Intégrales continues fractionnaires non stationnaires	75
5	Processus stochastiques de Fourier	81
5.1	Généralités sur l'analyse de Fourier stochastique	81
5.2	Analyse spectrale des séquences de variables aléatoires	88
5.2.1	Processus stochastiques à temps discrets	88
5.2.2	Champ stochastique discret intégrale fractionnaire	89
5.3	Processus fractionnaires à temps continu	94
5.3.1	Cas des processus fractionnaires stationnaires	95
5.3.2	Cas des processus fractionnaires non stationnaires	96
5.3.3	Synthèse par transformée de Fourier de Q -facteurs GCBF	97
II	Processus stochastiques d'ondelettes	101
6	Processus stochastiques d'ondelettes	103
6.1	Ondelettes et bancs de filtres à reconstruction parfaite	103
6.2	M -TPOD : principe de la décomposition	106

6.3	M -TPOD associée à l'espace de Paley-Wiener	110
6.3.1	Processus stochastique d'ondelettes	115
6.4	Ondelettes et processus stationnaires	117
6.4.1	Stationnarité d'ordre deux (sens large)	117
6.4.2	Stationnarité au sens strict	118
6.5	Ondelettes et processus non stationnaires	120
6.5.1	Cumulants d'ordre 2	120
6.5.2	Cumulants d'ordre ≥ 3	124
6.6	Cas des processus browniens fractionnaires	126
7	Asymptotiques des processus d'ondelettes	131
7.1	Contexte	131
7.1.1	Sans formalisation des chemins	131
7.1.2	Formalisation des chemins	132
7.1.3	Tous les chemins de détails décalent n vers l'infini	135
7.2	Autocorrélations limites de la M -TPOD	136
7.2.1	Généralités	136
7.2.2	Cas du MBF	143
7.3	Distributions asymptotiques de la M -TPOD	150
7.4	Résultats expérimentaux	157
7.4.1	Autocorrélations et processus stationnaires	157
7.4.2	Autocorrélations et processus non stationnaire	163
7.4.3	Distributions des processus en ondelettes	165
8	Analyse spectrale par ondelettes	175
8.1	Shannon-Nyquist et les filtres standards	175
8.1.1	Support fréquentiel des filtres : de Haar à Shannon-Nyquist	175
8.1.2	Divisions récursives des supports des filtres	179
8.1.3	Processus à temps discret	181
8.2	Analyse spectrale par paquets d'ondelettes	184
8.2.1	Estimation spectrale	184

8.2.2	Identification des singularités spectrales	187
8.2.3	Analyse spectrale MBF (1D)	188
8.2.4	Analyse spectrale des K -facteurs Gegenbauer (1D)	191
8.2.5	Analyse spectrale des champs 2D	194
III Applications		207
9	Régularisation de champs stochastiques	209
9.1	Contexte	210
9.2	Régularisation de champs stochastiques additifs	212
9.2.1	Modèle d'observation	212
9.2.2	Parcimonie de la représentation par ondelettes	213
9.2.3	Fonctions d'atténuation sigmoïdale	214
9.2.4	Fonctions de pénalité d'atténuation sigmoïdale	219
9.2.5	Régularisation par atténuation sigmoïdale	221
9.3	Régularisation de champs stochastiques multiplicatifs	223
9.3.1	Modèle d'observation	223
9.3.2	Ondelettes et algèbres multiplicatives	224
9.3.3	Ondelettes additives <i>versus</i> multiplicatives	226
9.3.4	Parcimonie spatio-temporelle et régularisation	233
10	Détection de changements	243
10.1	Contexte	243
10.2	Modélisations des processus stochastiques d'ondelettes	245
10.2.1	Modélisation des coefficients d'approximation	245
10.2.2	Dictionnaire de modèles pour la description des coefficients de détails	247
10.2.3	Modélisation des coefficients de détails	249
10.3	Recherche exhaustive de changements	250
10.3.1	Similarités multidates	252
10.3.2	Caractérisation spatio-temporelle	253

11 Classification de champs stochastiques	257
11.1 Mesure de stochasticité et textures	258
11.1.1 Mesure de stochasticité de Kolmogorov	258
11.1.2 Classes sémantiques de stochasticité	259
11.2 Recherche de bases TPOD de stochasticité	260
11.3 Discrimination stochastique et recherche de contenu texture	266
12 Fusion d'informations distribuées	269
12.1 Problème de recherche de meilleure base commune	271
12.2 Structure d'ordre dans une librairie de bases d'ondelettes . .	272
12.3 Information distribuée et meilleure base commune	274
12.3.1 Médiane d'une librairie de bases paquets ondelettes .	274
12.3.2 Entropies des projections	275
12.3.3 Recherche de la meilleure base marginale	277
12.3.4 Base commune des meilleures bases marginales	281
13 Conclusion et perspectives	283
13.1 Conclusion générale	283
13.2 Perspectives	285

Ondelettes et processus stochastiques développe le cadre théorique qui établit les propriétés mathématiques d'un processus stochastique projeté sur un espace fonctionnel d'ondelettes. Il montre que les transformées en ondelettes définissent un cadre pertinent, aussi bien d'analyse non paramétrique que de modélisation paramétrique de processus et champs stochastiques : on peut en effet décrire de nombreuses observations hétérogènes et informations imprécises grâce à des séries de processus simples associés aux coefficients de projection, pour une base d'ondelettes donnée à l'avance ou choisie sur un critère d'entropie.

Cet ouvrage donne un point de vue panoramique des conséquences de cette décomposition en processus simples pour certains modèles statistiques (principalement des modèles à intégration fractionnaire) et probabilistes (au moyen de dictionnaires de modèles paramétriques simples).

Les applications traitées à titre d'illustration concernent des problèmes de simulation et de caractérisation spectrale d'un champ stochastique (texture), de caractérisation d'un ensemble d'images dépendantes dans un contexte distribué semi-collaboratif avec un minimum d'échange d'informations, et d'analyse de séries temporelles d'images pour la détection de changements et la régularisation spatio-temporelle des données.

Cet ouvrage didactique et largement documenté s'adresse aux étudiants des second et troisième cycles universitaires, ainsi qu'aux ingénieurs et chercheurs en mathématiques, science des données et traitement numérique de l'information.

Abdourrahmane M. Atto est docteur en mathématiques et applications, maître de conférences et habilité à diriger des recherches dans le laboratoire « Informatique, systèmes, traitement de l'information et de la connaissance » (LISTIC) de l'Université Savoie Mont Blanc (USMB).

